CAPITOLO 12

L'equazione delle onde (o di d'Alembert (1747)) e alcuni problemi connessi

12.1 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale

La più semplice equazione alle derivate parziali iperbolica è l'equazione delle onde unidimensionale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \tag{12.1}$$

dove u è una funzione di due variabili indipendenti $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. La variabile x è comunemente identificata come "posizione" e t come "tempo"; c è una costante positiva. Fisicamente u può rappresentare lo spostamento normale delle particelle di una corda (infinita) vibrante.

Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale può essere così formulato:

assegnate

$$\begin{array}{lll} f = f(x) & \textit{in}\, \mathbb{R} & \textit{“posizione all'istante } t = 0\textit{”} \\ g = g(x) & \textit{in}\, \mathbb{R} & \textit{“velocità all'istante } t = 0\textit{”} \end{array}$$

cercare $u = u(x,t)$ *definita e regolare per* $x \in \mathbb{R}$ *e* $t \geq 0$ [41] *tale che*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \textit{in}\, \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \textit{in}\, \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & \textit{in}\, \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{P}$$

[41] Anche per $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. A differenza dell'operatore del calore, l'operatore delle onde è invariante rispetto all'inversione del tempo $(x,t) \to (x,-t)$. Pertanto è sufficiente studiare soluzioni in $t \geq 0$, perché risultati simili possono conseguirsi per $t \leq 0$, sostituendo t con $-t$.

Sussiste il seguente risultato:

Teorema 12.1.1. *(Teorema di esistenza e unicità)*
Siano $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$; allora il problema di Cauchy (P) ha un'unica soluzione $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ data da

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x+ct) + f(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d\mathcal{L}^1(s) \tag{12.2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Dimostrazione. Preliminarmente supponiamo che una $u = u(x,t)$ esista e sia soluzione dell'equazione in (P). Introdotte le coordinate caratteristiche (metodo di d'Alembert)

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \qquad \left(\text{da cui} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\xi+\eta}{2} \\ t &= \frac{\xi-\eta}{2c} \end{aligned}\right),$$

la $u(x,t)$ si trasforma in

$$U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right).$$

Si ha

$$U_\xi = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t$$

e

$$(U_\xi)_\eta = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt}$$

e quindi

$$U_{\xi\eta} = 0\,.$$

Allora, $U_\xi = F'(\xi)$ e

$$U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

e ritornando alle coordinate (x,t) si ha

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)\,.$$

Evidentemente $u \in C^2$ se e solo se $F, G \in C^2$.
Allora la soluzione generale di (12.1) è ottenuta come sovrapposizione di due onde che si propagano, senza cambiare forma, con velocità c in direzioni opposte lungo l'asse x. Imposte le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) = F(x) + G(x) \qquad (\text{e quindi } cf'(x) = cF'(x) + cG'(x))\,, \\ g(x) &= u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x)\,, \end{aligned}$$

otteniamo (per addizione e sottrazione)

$$cf'(x) + g(x) = 2cF'(x)$$

$$cf'(x) - g(x) = 2cG'(x)\,,$$

da cui

$$F'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x)$$
$$G'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x)\,,$$

e quindi

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,d\mathcal{L}^1(s) + \delta \qquad (\delta \in \mathbb{R})$$
$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,d\mathcal{L}^1(s) + \sigma \qquad (\sigma \in \mathbb{R})\,.$$

Poiché $f(x) = F(x) + G(x)$, necessariamente $\delta + \sigma = 0$ e in definitiva:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)\,d\mathcal{L}^1(s) + \delta \\ &\quad + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)\,d\mathcal{L}^1(s) + \sigma \\ &= \frac{1}{2}\big[f(x+ct) + f(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,d\mathcal{L}^1(s). \end{aligned}$$

Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ la $u = u(x,t)$ così determinata (euristicamente) è di classe $C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$ ed è la soluzione del problema (P). Infatti:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x)\,, \\ u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\big[cf'(x+ct) - cf'(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[cg(x+ct) + cg(x-ct)\big]\,, \\ u_t(x,0) &= \frac{c}{2}f'(x) - \frac{c}{2}f'(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x) = g(x)\,, \\ u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2}\big[c^2f''(x+ct) + c^2f''(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[c^2g'(x+ct) - c^2g'(x-ct)\big]\,, \\ u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\big[f'(x+ct) + f'(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[g(x+ct) - g(x-ct)\big]\,, \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\big[f''(x+ct) + f''(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[g'(x+ct) - g'(x-ct)\big]\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,.$$

□

Osservazione 12.1.2. (i) Nel caso $N = 1$ la soluzione $u = u(x,t)$ **non è meno regolare** dei dati $f = f(x)$ e $g = g(x)$.

(ii) La soluzione $u = u(x,t)$ è determinata univocamente dai valori dei dati f e g nell'intervallo $[x-ct, x+ct]$, il quale rappresenta l'**intervallo di dipendenza** (dai dati iniziali) per la soluzione nel punto (x,t).

(iii) Se assumiamo che $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}}\,, \|g\|_{\infty,\mathbb{R}} < \varepsilon$, per qualche $\varepsilon \in (0,1)$, allora dalla (12.2) si ha $\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}} \le (1+t)\,\varepsilon$ (dipendenza continua della soluzione dai dati f e g).

12.2 I movimenti di una corda con gli estremi fissi

Un problema rilevante relativo all'equazione delle onde unidimensionale si ottiene ponendosi in un intervallo limitato: in questo caso è appropriato definire, oltre alle condizioni iniziali, delle condizioni ai limiti (ovvero specificare i movimenti degli estremi dell'onda, che in questo caso sarà assimilata ad una corda).
Consideriamo quindi il problema di una corda omogenea con gli estremi fissi (le condizioni ai limiti sono pertanto indipendenti dal tempo) e della quale sono note posizione e velocità iniziali.
Il problema è definito da (qui prendiamo $c = 1$)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in }]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x,0) = f(x) & x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in [0, L] \end{cases} \tag{12.3}$$

con $f \in C^2([0,L])$, $g \in C^1([0,L])$.
Per risolvere il problema (12.3) cerchiamo soluzioni a variabili separate del tipo $u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$. Una scelta di questo tipo trasforma l'equazione in

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)}\,.$$

Il membro a sinistra è indipendente da t, il membro a destra è indipendente da x, dunque entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante, diciamo $-\lambda$, quindi

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi} = -\lambda$$

e pertanto il problema si spezza in due equazioni, una delle quali soggetta alle condizioni ai limiti:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\,\varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \psi'' + \lambda\,\psi = 0\,.$$

Al fine di risolvere il primo sistema bisogna innanzitutto stabilire per quali valori di λ le condizioni ai limiti sono soddisfacibili da φ non identicamente nulla: questi λ prendono il nome di **autovalori** e le corrispondenti soluzioni sono chiamate **autofunzioni**. Posto $\lambda = \gamma^2$ otteniamo soluzioni del tipo

$$\varphi(x) = c_1 \text{ sen } \gamma x + c_2 \cos \gamma x\,.$$

Affinché le soluzioni non siano banali, risulta $c_2 = 0$ dalla condizione sul primo estremo e $\gamma = \dfrac{n\pi}{L}$; gli autovalori sono pertanto positivi e in particolare non nulli, in quanto sono del tipo $\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$, con $n \in \mathbb{N}$.
La seconda equazione non è soggetta a condizioni iniziali, e quindi, combinando la ψ e la φ trovate e tenendo conto della linearità del problema otteniamo la soluzione formale

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \text{ sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]\,. \tag{12.4}$$

Pertanto il movimento di una corda omogenea i cui estremi sono fissi è dato dalla composizione delle autofunzioni che sono anche chiamate **autovibrazioni**: a queste sono associati gli autovalori, anche chiamati **autofrequenze**.
Per imporre le condizioni iniziali si sfrutta il fatto che le autofunzioni $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ costituiscono un sistema ortogonale completo in $L^2([0,L])$: risolvere il problema della corda omogenea con gli estremi fissi significa quindi stabilire i coefficienti di Fourier delle soluzioni trovate mediante la separazione delle variabili in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali, che possono essere sviluppate come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x)\, d\mathcal{L}^1(x)$$

e

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x)\, d\mathcal{L}^1(x).$$

La serie (12.4) con i coefficienti a_n e b_n così determinati rappresenta la soluzione del problema (12.3).

12.3 Equipartizione dell'energia

Consideriamo il problema della propagazione ondosa di una corda (infinita) vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{12.5}$$

con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)$ la soluzione del problema (12.5) e sia

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right) d\mathcal{L}^1(x).$$

l'energia dell'onda u all'istante t.

Definizione 12.3.1. Si definisce energia cinetica dell'onda u all'istante t l'integrale

$$e_{\text{cin}}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\, d\mathcal{L}^1(x)$$

ed energia potenziale dell'onda u all'istante t l'integrale

$$e_{\text{pot}}(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2(x,t)\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Dalla precedente definizione risulta ovviamente

$$e(t) = e_{\text{cin}}(t) + e_{\text{pot}}(t).$$

Se i dati iniziali del problema della propagazione delle onde sono nulli fuori da un compatto sussiste il seguente risultato.

Teorema 12.3.2. *(Equipartizione e conservazione dell'energia)*
Sia $u \in C^2\left(\mathbb{R} \times [0, +\infty[\right)$ *la soluzione del problema (12.5).*
Supponiamo che $f \in C_0^2(\mathbb{R})$*,* $g \in C_0^1(\mathbb{R})$*. Allora*

(i) esiste $T > 0$ *tale che per ogni* $t > T$ *risulta*

$$e_{cin}(t) = e_{pot}(t)\,;$$

(ii) l'energia $e(t)$ *è costante nel tempo.*

Dimostrazione.
(i) L'unica soluzione $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ del problema (12.5) è data da (Teorema 12.1.1)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x+ct) + f(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d\mathcal{L}^1(s) \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t \geq 0\,. \quad (12.6)$$

Osservato che

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\big[cf'(x+ct) - cf'(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[cg(x+ct) + cg(x-ct)\big]$$

e

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\big[f'(x+ct) + f'(x-ct)\big] + \frac{1}{2c}\big[g(x+ct) - g(x-ct)\big]\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} e_{\text{cin}}(t) - e_{\text{pot}}(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_t^2(x,t) - c^2\, u_x^2(x,t)\right)\, d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \left(-c^2\, f'(x+ct)\, f'(x-ct) + g(x+ct)\, g(x-ct)\right) d\mathcal{L}^1(x)\,. \end{aligned}$$

Per ipotesi esiste un intervallo $[a,b]$ tale che f e g sono nulle fuori da tale intervallo. Posto

$$T = \frac{b-a}{2c}\,,$$

per $t > T$ risulta che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $x - ct < a$ o $x + ct > b$ e quindi l'integrale che compare nell'ultima espressione è nullo, da cui segue l'asserto (i).

(ii) Integrando per parti il termine

$$\int_{-R}^{R} c^2\, u_t\, u_{xx}\, d\mathcal{L}^1(x)$$

e ricordando che la funzione u è soluzione dell'equazione della corda vibrante si ha, per $R > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{R} \left(u_t\, u_{tt} + c^2\, u_x\, u_{xt}\right)\, d\mathcal{L}^1(x) = \\ = &\int_{-R}^{R} u_t\left(u_{tt} - c^2\, u_{xx}\right)\, d\mathcal{L}^1(x) + c^2\left[u_x(R,t)\, u_t(R,t) - u_x(-R,t)\, u_t(-R,t)\right] \\ = &\ c^2\left[u_x(R,t)\, u_t(R,t) - u_x(-R,t)\, u_t(-R,t)\right]\,. \end{aligned}$$

Passando al limite per $R \to +\infty$, osservato che dall'espressione (12.6) segue che u è costante per R sufficientemente grande essendo f e g nulle fuori da un compatto, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \left(u_t \, u_{tt} + c^2 \, u_x \, u_{xt} \right) \, d\mathcal{L}^1(x) = 0$$

e quindi $e(t) = e(0)$ per ogni $t > 0$. □

12.4 Medie sferiche ed Equazione di Darboux

Sia $h \in C^0(\mathbb{R}^N)$; fissata una sfera $\partial B_r(x)$, poniamo

$$M_h(x,r) := \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) \, d\mathcal{H}^{N-1}(y)$$

(media sferica di h, sulla sfera di centro x e raggio $r > 0$).
Posto $y = x + r\xi$ con $|\xi| = 1$, si ha

$$M_h(x,r) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

allora possiamo ragionevolmente estendere la definizione di $M_h(x,r)$ per $r < 0$, ponendo per $r < 0$

$$M_h(x,r) = M_h(x,-r) \qquad \text{(estensione “pari” rispetto ad } r\text{)},$$

osservato che

$$\int_{|\xi|=1} h(x+r\xi) \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \int_{|\xi|=1} h\left(x - r(-\xi)\right) \, d\mathcal{H}^{N-1}(-\xi) = \int_{|\xi|=1} h(x-r\xi) \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \,.$$

Inoltre, conoscendo $(x,r) \mapsto M_h(x,r)$, conosciamo anche $x \mapsto h(x)$, in quanto si ha

$$M_h(x,0) = h(x), \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^N \,.$$

È evidente che se $h \in C^k(\mathbb{R}^N)$ allora $M_h(x,r) \in C^k(\mathbb{R}^{N+1})$.

Proposizione 12.4.1. *Se $h \in C^2(\mathbb{R}^N)$, allora $M_h(x,r)$ soddisfa l'***equazione di Darboux**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r) \,,$$

e verifica le condizioni iniziali

$$M_h(x,0) = h(x) \,, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) \right]_{r=0} = 0 \,.$$

Dimostrazione. Per il teorema della divergenza (posto $y = x + r\,\xi$ con $|\xi| = 1$) si ha

$$\begin{aligned}\int_{|y-x|<r} \Delta h(y)\, d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{|y-x|=r} \nabla h(y) \cdot \xi\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &= r^{N-1} \int_{|\xi|=1} \nabla h(x + r\xi) \cdot \xi\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,,\end{aligned}$$

perciò,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} h(x + r\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right] \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{|y-x|<r} \Delta h(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_0^r \varrho^{N-1}\left(\Delta_x \int_{|\xi|=1} h(x + \varrho\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right) d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \Delta_x \int_0^r M_h(x,\varrho)\varrho^{N-1}\, d\mathcal{L}^1(\varrho)\,,\end{aligned}$$

quindi

$$r^{N-1}\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) = \Delta_x \int_0^r M_h(x,\varrho)\varrho^{N-1}\, d\mathcal{L}^1(\varrho)\,,$$

e derivando rispetto ad r si ha

$$(N-1)r^{N-2}\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) + r^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_h(x,r) = \Delta_x \left[M_h(x,r)r^{N-1}\right]$$

da cui, dividendo per r^{N-1}, segue l'equazione di Darboux.
Si è già osservato che

$$M_h(x,0) = h(x)\,;$$

inoltre, tenuto conto che la soluzione $M_h(x,r)$ dell'equazione di Darboux è pari rispetto ad r, abbiamo

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r)\right]_{r=0} = 0\,.$$

□

12.5 Metodo di Poisson delle medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux

Consideriamo ora il problema di Cauchy per l'equazione delle onde (di d'Alembert) in dimensione (spaziale) $N \geq 2$:

$$\begin{cases} \Box u := u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \qquad (P)$$

Questo problema può essere risolto col **metodo di Poisson delle medie sferiche** se $N \geq 2$.
Illustriamo questo metodo: procediamo euristicamente e supponiamo che esista $u = u(x,t) \in C^2\big(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\big)$ soluzione di (P). Consideriamo le medie sferiche di u come funzione di x (e vediamo che possiamo trasformare il problema di Cauchy (P) in un problema di Cauchy per una equazione iperbolica nelle due variabili reali indipendenti r e t (equazione di Eulero-Poisson-Darboux)):

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,t)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi);$$

per la proposizione 12.4.1 M_u soddisfa l'equazione di Darboux

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_u(x,r,t) = \Delta_x M_u(x,r,t).$$

Ora

$$\begin{aligned}
\Delta_x M_u(x,r,t) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x+r\xi,t)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
\left(\begin{array}{l}\text{essendo } u \text{ soluzione dell'equa-}\\ \text{zione di d'Alembert in } (P)\end{array}\right) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+r\xi,t)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,t)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right] \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t)\,,
\end{aligned}$$

e, quindi, dall'equazione di Darboux si ha:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_u(x,r,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t)\,,$$

cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t) - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_u(x,r,t) = 0 \qquad (\text{per ogni } x \textbf{ fissato} \text{ in } \mathbb{R}^N)$$

(**equazione di Eulero-Poisson-Darboux**, che dipende dalla dimensione N).
Tenuto conto delle condizioni iniziali in (P) si ha:

$$\begin{aligned}
M_u(x,r,0) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,0)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} f(x+r\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= M_f(x,r);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial t} M_u(x,r,t)\right]_{t=0} &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial t} u(x+r\xi,0)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} g(x+r\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= M_g(x,r).
\end{aligned}$$

In definitiva $u = u(x,t) \in C^2\big(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\big)$ è soluzione di (P) se e solo se $M_u(x,r,t)$, per ogni **fissato** $x \in \mathbb{R}^N$, è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t) - c^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{N-1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x,r,t) = 0 \\ M_u(x,r,0) = M_f(x,r) \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t} M_u(x,r,t) \right]_{t=0} = M_g(x,r)\,. \end{cases} \tag{P'}$$

12.6 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $\mathrm{N} = 3$

Nel caso $N = 3$ (*moto di onde acustiche o ottiche*), da (P') si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x,r,t) = 0$$

e moltiplicando per r:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[rM_u(x,r,t) \Big] - c^2 \underbrace{\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x,r,t)}_{= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rM_u(x,r,t) \right]} = 0\,,$$

e quindi $rM_u(x,r,t)$, come funzione di r e t, è soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale con dati iniziali

$$rM_u(x,r,0) = rM_f(x,r)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} rM_u(x,r,t) \right]_{t=0} = rM_g(x,r).$$

Allora, dalla formula (12.2) di d'Alembert (caso unidimensionale) si ha:

$$rM_u(x,r,t) = \frac{1}{2}\Big[(r+ct)M_f(x,r+ct) + (r-ct)M_f(x,r-ct) \Big] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x,s)\,d\mathcal{L}^1(s).$$

Usando il fatto che $M_f(x,r)$ e $M_g(x,r)$ sono pari in r, si ha:

$$M_u(x,r,t) = \frac{(ct+r)M_f(x,ct+r) - (ct-r)M_f(x,ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc}\int_{ct-r}^{ct+r} sM_g(x,s)\,d\mathcal{L}^1(s)$$

$$\left(\text{perché } \int_{r-ct}^{r+ct} \underbrace{sM_g(x,s)}_{\text{dispari in } s}\,d\mathcal{L}^1(s) = \underbrace{\int_{r-ct}^{ct-r} sM_g(x,s)\,d\mathcal{L}^1(s)}_{=0} + \int_{ct-r}^{ct+r} sM_g(x,s)\,d\mathcal{L}^1(s) \right).$$

Passando al limite per $r \to 0$

$$M_u(x,0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[tM_f(x,ct) \Big] + tM_g(x,ct)\,,$$

e poiché

$$M_u(x,0,t) = \frac{1}{N\omega_N}\int_{|\xi|=1} u(x,t)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = u(x,t),$$

si ha

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[tM_f(x,ct)\Big] + tM_g(x,ct)\,.$$

In definitiva se $u = u(x,t) \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty[\big)$ è soluzione del problema di Cauchy (P), essa si rappresenta così:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[tM_f(x,ct)\Big] + tM_g(x,ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[t\frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} f(y)\,d\mathcal{H}^2(y)\Big] + t\frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} g(y)\,d\mathcal{H}^2(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} f(y)\,d\mathcal{H}^2(y)\Big] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} g(y)\,d\mathcal{H}^2(y). \end{aligned}} \tag{12.7}$$

Se in (12.7) si effettua il cambiamento di variabile $y = x + c\,t\,\xi$ con $|\xi| = 1$ (in modo da poter derivare rispetto a t sotto il segno di integrale) si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi)\right] + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi) + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{\partial}{\partial t}f(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &\qquad + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi) + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\sum_{j=1}^{3} f_{y_j}(x+ct\xi)c\xi_j\,d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &\qquad + \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^2(\xi)\,, \end{aligned}$$

cioè

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct}\left[f(y) + \sum_{j=1}^{3} f_{y_j}(y)(y_j - x_j) + t\,g(y)\right]\,d\mathcal{H}^2(y)\,.} \tag{12.8}$$

Le formule (12.7)-(12.8) sono dovute a Kirchoff.

Viceversa, sussiste il seguente

Teorema 12.6.1. *(Teorema di esistenza e unicità)*
Siano $f = f(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g = g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$; allora

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[tM_f(x,ct)\Big] + tM_g(x,ct)$$

è l'unica soluzione di classe $C^2\left(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty[\right)$ del problema di Cauchy (P) in dimensione $N = 3$.

Dimostrazione. Chiaramente $u(x,t)$ data da (12.7) è di classe $C^2\left(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty[\right)$. Da

$$u(x,t) = M_f(x,ct) + t\frac{\partial}{\partial t}M_f(x,ct) + tM_g(x,ct)$$

si ha

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= M_f(x,0) = f(x),\\
u_t(x,t) &= \underbrace{2\frac{\partial}{\partial t}M_f(x,ct)}_{\text{dispari in } t} + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_f(x,ct) + M_g(x,ct) + t\frac{\partial}{\partial t}M_g(x,ct),\\
u_t(x,0) &= M_g(x,0) = g(x);
\end{aligned}$$

essendo l'operatore di d'Alembert $\square := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta_x$ lineare, per provare che

$$\square u(x,t) = 0$$

è sufficiente provare che $\square\,[tM_g(x,ct)] = 0$ e $\square\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}[tM_f(x,ct)]\right\} = 0$. Infatti, posto $r = ct$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,[tM_g(x,ct)] &= c\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,[rM_g(x,r)]\\
\begin{pmatrix}\text{dall'equazione di Darboux}\\ \text{in dimensione } N=3\end{pmatrix} &= c\,\Delta_x\,[r\,M_g(x,r)]\\
&= c\,r\,\Delta_x M_g(x,r)\\
&= c^2\,\Delta_x\,[t\,M_g(x,ct)]
\end{aligned}$$

e quindi

$$\square\,[t\,M_g(x,ct)] = 0\,.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[t\,M_f(x,ct)\Big]\right\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[t\,M_f(x,ct)\Big]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{c^2\Delta_x\Big[t\,M_f(x,ct)\Big]\right\}\\
&= c^2\Delta_x\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[t\,M_f(x,ct)\Big]\right\},
\end{aligned}$$

da cui

$$\square\left\{\frac{\partial}{\partial t}\,[t\,M_f(x,ct)]\right\} = 0\,.$$

□

Osservazione 12.6.2. (i) A differenza del caso $N = 1$, nel caso $N = 3$ si ha che per la soluzione u si può verificare la **perdita di almeno un ordine di derivazione**, rispetto alla regolarità dei dati.

(ii) **Principio di Huygens nel caso N** $= 3$. Dalla (12.8) si deduce che $u(x, t)$ dipende *solo* dai valori di f, delle sue derivate parziali prime e da g sulla **sfera di centro x e raggio ct**, $|y - x| = ct$ (**dominio di dipendenza**).
Ciò dà luogo al principio di Huygens: un segnale (acustico o ottico) concentrato in un punto x all'istante $t = 0$ è concentrato all'istante $t > 0$ sulla sfera di centro x e raggio ct.
In particolare, un ascoltatore alla distanza d da uno strumento musicale ascolta esattamente ciò che è stato suonato all'istante $t - \dfrac{d}{c}$, piuttosto che una mistura di tutte le note emesse fino a quell'istante.

(iii) **Decadimento per tempi lunghi.** Mentre il supporto della soluzione con dati iniziali a supporto compatto si espande, la soluzione decade nel tempo: per $t \to +\infty$ si ha $u(x, t) \to 0$.
Precisamente se i dati g, f e le sue derivate parziali prime, sono limitati e a supporto compatto, allora $u(x, t) \to 0$ al più come $\dfrac{1}{t}$ per $t \to +\infty$ (cfr. (12.8)).

12.7 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) N = 2 (Metodo della discesa di Hadamard)

Con il metodo della discesa di Hadamard, soluzioni di una equazione alle derivate parziali sono ottenute considerandole come soluzioni speciali di un'altra equazione che coinvolge più variabili indipendenti, e che può essere risolta.
Così una soluzione $u(x_1, x_2, t)$ del problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 2$ (*moto di onde su uno specchio d'acqua*), può essere riguardata come una soluzione dello stesso problema in dimensione $N = 3$ che non dipende da x_3.
Allora $u(x_1, x_2, t)$ è data dalla formula (12.7) per $x_3 = 0$ con

$$f(y) = f(y_1, y_2), \qquad g(y) = g(y_1, y_2),$$

gli integrali di superficie essendo estesi sulla sfera (di centro $(x_1, x_2, 0)$ e raggio ct) $|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2} = ct$:

$$u(x_1, x_2, t) \equiv u(x_1, x_2, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} f(y_1, y_2)\, d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3)\right] + \\ + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} g(y_1, y_2)\, d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3)\,.$$

Osservato che sulla semisfera (cartesiana) si ha

$$d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\Big)^2}\, d\mathcal{L}^2(y_1, y_2) = \frac{ct}{|y_3|}\, d\mathcal{L}^2(y_1, y_2)\,,$$

e che i punti (y_1, y_2, y_3) e $(y_1, y_2, -y_3)$ danno lo stesso contributo agli integrali, si ottiene:

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{f(y_1,y_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,d\mathcal{L}^2(y_1,y_2)\right]+\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{g(y_1,y_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,d\mathcal{L}^2(y_1,y_2)$$

dove $r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$.

Sussiste quindi il seguente

Teorema 12.7.1. *(Teorema di esistenza e unicità)*
Siano $f = f(x_1,x_2) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g = g(x_1,x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2)$; *allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0,+\infty[\\ u(x_1,x_2,0) = f(x_1,x_2) & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u_t(x_1,x_2,0) = g(x_1,x_2) & \text{in } \mathbb{R}^2\,, \end{cases} \qquad (P)$$

ha un'unica soluzione $u = u(x_1,x_2,t) \in C^2\big(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty[\big)$ *data da*

$$\boxed{u(x_1,x_2,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{f(y_1,y_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,d\mathcal{L}^2(y_1,y_2)\right]+\frac{1}{2\pi c}\int_{r<ct}\frac{g(y_1,y_2)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\,d\mathcal{L}^2(y_1,y_2)}$$

(formula di Poisson)

dove $r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$.

Osservazione 12.7.2. Nel caso $N = 2$ il **dominio di dipendenza** (dai dati iniziali) per la soluzione nel punto (x_1,x_2,t) consiste nel **cerchio di centro** $\mathbf{x}$ **e raggio** $\mathbf{ct}$ nel piano (y_1,y_2). Pertanto il principio di Huygens non vale in due dimensioni (i disturbi (ondosi) continuano ad avere effetto indefinitivamente, come mostrano le onde d'acqua).

In generale si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 12.7.3.

(i) Se $N \geq 3$, N *__dispari__*, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ *dove* $m = \dfrac{N+1}{2}$, *allora*

$$u(x,t) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(N-2)\cdot N\cdot\omega_N}\cdot \\ \cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{N-3}{2}}\left(t^{N-2}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right)\right. \\ \left. + \left(t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{N-3}{2}}\left(t^{N-2}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right)\right]$$

è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \Box u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

(ii) Se $N \geq 2$, N pari, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ dove $m = \dfrac{N+2}{2}$, allora

$$u(x,t) = \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (N-1) \cdot (N+1) \cdot \omega_{N+1}} \cdot \\ \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|<1} \frac{f(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} \, d\mathcal{L}^N(y) \right) \right. \\ \left. + \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|<1} \frac{g(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} \, d\mathcal{L}^N(y) \right) \right]$$

è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Box u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

12.8 Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione delle onde: Principio di Duhamel

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde **non-omogenea**

$$\begin{cases} \Box u(x,t) := u_{tt} - c^2 \Delta_x u = w(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \qquad (N = 1,2,3) \qquad (P_w)$$

dove

se $N = 1$, $\quad f \in C^2(\mathbb{R})$, $\quad g \in C^1(\mathbb{R})$ $\quad$ e $\quad w \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$,

se $N = 2,3$, $\quad f \in C^3(\mathbb{R}^N)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ $\quad$ e $\quad w \in C^2\left(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\right)$.

Il principio di Duhamel consente la riduzione del problema non-omogeneo (P_w) a una famiglia di problemi per l'equazione delle onde omogenea.

Precisamente si ha:

Teorema 12.8.1. *Nelle precedenti ipotesi poste per f, g e w ($N = 1,2,3$), il problema di Cauchy non-omogeneo (P_w) ha un'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ data da*

$$u(x,t) = u^1(x,t) + \int_0^t v(x,t-s;s) \, d\mathcal{L}^1(s),$$

dove u^1 è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ del problema

$$\begin{cases} \Box u^1(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u^1(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u^1_t(x,0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e $v(x,t;s)$ per ogni $s \geq 0$ è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ del problema

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t;s) - c^2 \Delta_x v(x,t;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ v(x,0;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ v_t(x,0;s) = w(x,s) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \qquad (P_s)$$

Dimostrazione. Essendo il problema lineare, è sufficiente provare che posto

$$u^2(x,t) = \int_0^t v(x, t-s; s)\, d\mathcal{L}^1(s)\,,$$

dove $v(x,t;s)$ è l'unica soluzione di (P_s), u^2 è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u^2_{tt} - c^2\Delta_x u^2 = w(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\\ u^2(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u^2_t(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
u^2(x,0) &= 0; \\
u^2_t(x,t) &= \int_0^t v_t(x,t-s;s)\, d\mathcal{L}^1(s) + \underbrace{v(x,0;s)}_{=0} \\
u^2_t(x,0) &= 0; \\
u^2_{tt}(x,t) &= \int_0^t v_{tt}(x,t-s;s)\, d\mathcal{L}^1(s) + \underbrace{v_t(x,0;t)}_{=w(x,t)} \\
&= \int_0^t v_{tt}(x,t-s;s)\, d\mathcal{L}^1(s) + w(x,t); \\
u^2_{tt} - c^2\Delta_x u^2 &= \int_0^t v_{tt}(x,t-s;s)\, d\mathcal{L}^1(s) + w(x,t) - c^2 \int_0^t \Delta_x v(x,t-s;s)\, d\mathcal{L}^1(s) \\
&= \int_0^t \underbrace{\left[v_{tt}(x,t-s;s) - c^2\Delta_x v(x,t-s;s)\right]}_{=0} d\mathcal{L}^1(s) + w(x,t) \\
&= w(x,t).
\end{aligned}$$

□

12.9 Metodi dell'integrale dell'energia

Definizione 12.9.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $T > 0$. Si definisce <u>energia dell'onda u in Ω al tempo t</u> l'integrale

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u^2_t(x,t) + c^2 \left|\nabla_x u(x,t)\right|^2 \right) d\mathcal{L}^N(x) \qquad (0 \le t \le T)\,. \tag{12.9}$$

Teorema 12.9.2. *(Unicità)*
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato, con frontiera regolare; sia $\Omega_T = \Omega \times]0,T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$, con $T > 0$.
Allora esiste al più una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta_x u = w(x,t) & \textit{in } \Omega_T \\ u(x,0) = f(x) & \textit{su } \Gamma_T \\ u_t(x,0) = g(x) & \textit{su } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{P_w}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\widetilde{u}$ sia un'altra soluzione; per la linearità del problema, $v := u - \widetilde{u}$ è soluzione di

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta_x v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v(x,0) = 0 & \text{su } \Gamma_T \\ v_t(x,0) = 0 & \text{su } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{12.10}$$

Calcoliamo la derivata prima rispetto al tempo di (12.9) (scritta per v), ottenendo

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int_\Omega \left(v_t\, v_{tt} + c^2\, \nabla_x v \cdot \nabla_x v_t\right)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega v_t \left(v_{tt} - c^2\, \Delta_x v\right)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0\,.$$

Non c'è termine di frontiera perché $v = 0$ su Γ_T, e quindi $v_t = 0$ su $\partial\Omega \times [0,T]$. Pertanto, per ogni $0 \le t \le T$, risulta $e(t) = e(0) = 0$, e quindi $v_t = 0$ e $\nabla_x v = 0$ su Ω_T. Dal momento che $v_t = 0$ su $\Omega \times \{t = 0\}$, allora $v = 0$ in Ω_T, ovvero $u = \widetilde{u}$ in Ω_T. □

Per quanto riguarda ancora il **dominio di dipendenza** delle soluzioni dell'equazione delle onde dimostriamo il seguente risultato col metodo dell'energia.

Teorema 12.9.3. *(Velocità finita di propagazione)*
Sia $u \in C^2\left(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[\right)$ *soluzione di* $u_{tt} - c^2\, \Delta_x u = 0$ *e siano* $x^0 \in \mathbb{R}^N$, $t_0 > 0$.
Se $u \equiv u_t \equiv 0$ *su* $B_{c\,t_0}(x^0) \times \{t = 0\}$ *allora* $u \equiv 0$ *sul cono*

$$C = \left\{(x,t)\,;\ 0 \le t \le t_0\,,\ |x - x^0| \le c(t_0 - t)\right\}\ .$$

In particolare un "disturbo" originatosi fuori di $B_{c\,t_0}(x^0)$ non ha effetto sulla soluzione in C, e di conseguenza ha velocità di propagazione finita (cfr. quanto detto in proposito nell'Osservazione 12.6.2 (ii) e nell'Osservazione 12.7.2).

Dimostrazione. Consideriamo, per $0 \le t < t_0$, l'integrale dell'energia dell'onda u sulla palla $B(t) := B_{c(t_0 - t)}(x^0)$

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(t)} \left(u_t^2(x,t) + c^2\, |\nabla_x u(x,t)|^2\right)\, d\mathcal{L}^N(x) \tag{12.11}$$

che possiamo anche esprimere come

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^{c(t_0 - t)} d\mathcal{L}^1(r) \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u_t^2(\xi,t) + c^2\, |\nabla_x u(\xi,t)|^2\right)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,.$$

Derivando rispetto al tempo risulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e(t) &= \int_{B(t)} \left(u_t\, u_{tt} + c^2\, \nabla_x u \cdot \nabla_x u_t\right)\, d\mathcal{L}^N(x) - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} \left(u_t^2 + c^2\, |\nabla_x u|^2\right)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&\quad \text{(per la I identità di Green, Teorema 1.10.1)} \\
&= \int_{B(t)} u_t \left(u_{tt} - c^2\, \Delta_x u\right)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial B(t)} c^2\, u_t\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&\quad - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} \left(u_t^2 + c^2\, |\nabla_x u|^2\right)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&\quad \text{(per ipotesi } u \text{ è soluzione dell'equazione } u_{tt} - c^2\, \Delta_x u = 0\text{)} \\
&= c \int_{\partial B(t)} \left(c\, u_t\, \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\, u_t^2 - \frac{1}{2}\, c^2\, |\nabla_x u|^2\right)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,.
\end{aligned}$$

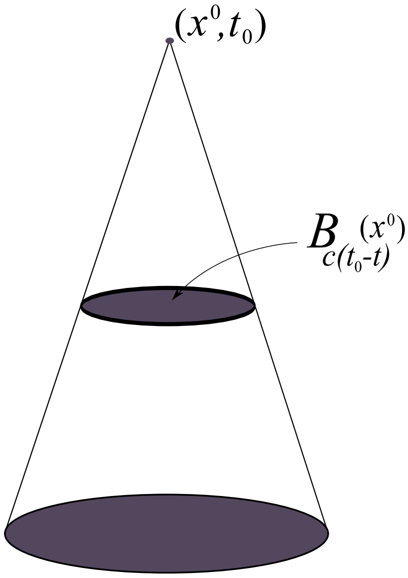

Figura 12.1: Cono di luce

Dalle maggiorazioni

$$c\left|u_t\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le c\,|u_t|\,|\nabla_x u| \le \frac{1}{2}\,u_t^2 + \frac{c^2}{2}\,|\nabla_x u|^2$$

deduciamo che $\frac{d}{dt}e(t) \le 0$ e quindi $e(t) \le e(0)$ per $0 \le t \le t_0$. Osservato che $e(0) = 0$ (dalle ipotesi su u e dalla (12.11)) si ha $e(t) \le e(0) = 0$ per $0 \le t \le t_0$ e quindi, dalla (12.11), risulta $u_t \equiv 0$ e $\nabla_x u \equiv 0$ da cui segue $u \equiv 0$ in C. $\square$